La modellistica matematica: una sintesi tra teoremi e mondo reale

ALFIO QUARTERONI
Ordinario di calcolo numerico

"Le forme create dal matematico, come quelle create dal pittore o dal poeta, devono essere belle; le idee, come i colori o le parole, devono legarsi armoniosamente. Al mondo, non vi è un posto perenne per la matematica brutta."

G.H.Hardy

Vorrei innanzitutto ringraziare il Magnifico Rettore e il Senato Accademico per avermi affidato la prolusione che dà inizio al nuovo Anno Accademico. È un grande onore per me e per il dipartimento di cui faccio parte. Il tema che mi propongo di analizzare è quello della modellistica matematica, del suo ruolo nella scienza in generale e nella cultura politecnica in particolare, nonché del suo interesse nel contesto extra-accademico. Negli ultimi decenni abbiamo assistito a un vertiginoso aumento dell'uso della matematica, sia nello sviluppo teorico di diverse discipline scientifiche, sia nelle applicazioni a svariati contesti nella vita quotidiana. Mezzo secolo fa, salvo sporadiche eccezioni, con il termine "matematica applicata" si intendeva essenzialmente l'applicazione della matematica alla meccanica. Oggi, la matematica può considerarsi, a buon diritto, un elemento fondamentale del processo cognitivo e descrittivo di intere discipline, quali, per esempio, la fisica, la chimica, la biologia, le scienze dell'ingegneria, la medicina e l'economia. Con il termine modellistica matematica si intende il processo che si sviluppa attraverso l'interpretazione di un problema originato da tali discipline, la rappresentazione dello stesso problema mediante il linguaggio e le equazioni della matematica, l'analisi di tali equazioni, nonché l'individuazione di metodi di simulazione numerica idonei ad approssimarle, e infine, l'implementazione di tali metodi su calcolatore tramite opportuni algoritmi (Fig. 1).

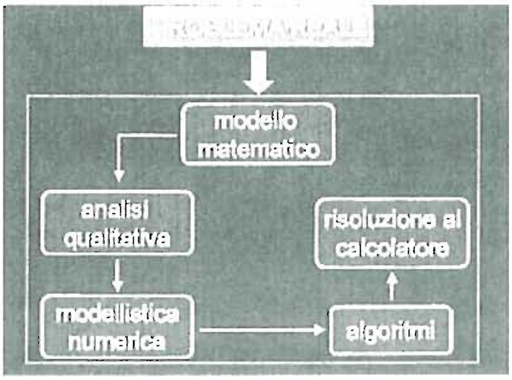


Figura 1
La modellistica matematica.

Che cosa motiva l'interesse per la modellazione matematica, e quali sono i vantaggi che possono derivare dall'applicazione di una buona teoria matematica ai diversi aspetti del reale? Nelle scienze sperimentali, via via che una disciplina passa dallo stadio primordiale di osservazione e descrizione empirica di fenomeni, a quello di struttura logica organizzata, essa tende a servirsi di strumenti matematici sempre più raffinati. Per altre scienze, le motivazioni possono essere molteplici e di varia natura. Per esempio, si formulano modelli matematici quando si vogliono porre i presupposti per esercitare un controllo su dinamiche demografiche o sociali.

Oppure, come avviene per molti problemi nelle scienze economiche, i modelli matematici consentono di desumere informazioni quantitative operando su un numero di variabili assai più grande di quelle che potrebbero essere considerate in un'analisi meramente qualitativa. Ciò avviene per quelle teorie che formulano ipotesi su agenti che non possono prendere decisioni indipendentemente uno dall'altro e che tendono a massimizzare determinati obiettivi con risorse limitate. In tale contesto, è cruciale riuscire a prevedere la risposta di sistemi fortemente interdipendenti al variare delle condizioni di riferimento (come le situazioni di mercato).

È infine doveroso rilevare come un forte impulso alla modellazione matematica della realtà su scala sempre più vasta sia venuto dall'applicazione dell'analisi dei sistemi, attraverso la quale si amplia il campo di osservazione, concependo scenari su scala globale. A titolo di esempio, citiamo il modello elaborato nel periodo della guerra fredda sul comportamento dell'atmosfera dopo l'uso di armi atomiche, con la terrificante prospettiva dell'inverno nucleare. Oppure il cosiddetto modello di *global change*, che vede tuttora impegnati numerosi scienziati per la descrizione dell'interazione fra oceani, terra e atmosfera, al fine di predire in termini accurati variazioni climatiche dovute all'effetto serra.

La modellistica matematica nella cultura politecnica

Qualunque ne sia la motivazione, grazie alla modellistica matematica un problema del mondo reale viene trasferito dall'universo che gli è proprio in un altro habitat in cui può essere analizzato più convenientemente, risolto per via numerica, indi ricondotto al suo ambito originario previa visualizzazione e interpretazione dei risultati ottenuti (Fig.2). Il modello non esprime necessariamente l'intima e reale essenza del problema (la realtà è spesso così complessa da non lasciarsi rappresentare in modo esaustivo con formule matematiche), ma deve fornirne una sintesi utile. I matematici hanno un ruolo peculiare in tale contesto. Essi sanno vedere e capire la natura intrinseca di un problema, determinare quali caratteristiche sono rilevanti e quali non lo sono, e, di conseguenza, sviluppare una rappresentazione matematica che contiene l'essenza del problema stesso.
Una caratteristica della sfera d'indagine matematica presente in questo processo è l'astrazione, ovvero la capacità di identificare caratteristiche comuni in campi differenti, così che idee generali possano essere elaborate a priori e applicate di conseguenza a situazioni fra loro assai diverse. I matematici hanno la consuetudine a trattare con l'astrazione, separandosi dal problema e sganciando la loro analisi da tecnologie specifiche e mutevoli; a fare emergere sottili divergenze e portare alla luce analogie a priori impensabili; a sviluppare modelli per sistemi astratti e dimostrarne le proprietà fondamentali (coglie bene questa pulsione Eddington quando scrive: "la dimostrazione è un idolo davanti al quale il matematico si tortura"). L'ingegneria ha tradizionalmente beneficiato dell'uso di modelli matematici nelle varie fasi inerenti la progettazione, il controllo, l'ottimizzazione e la gestione di processi tecnologici e produttivi, nei settori più disparati quali quello aeronautico, meccanico-strutturistico, chimico, della microelettronica, dell'industria energetica e di processo, della bio-ingegneria e dell'ambiente. Gli ingegneri sono sempre più interessati a utilizzare in modo complementare l'analisi sperimentale e la simulazione numerica. La prima è insostituibile per acquisire una corretta sensibilità fisica nei confronti del fenomeno in esame, anche se può avere costi elevati. Inoltre, in alcuni frangenti, come nel caso della galleria del vento per l'analisi di processi fluidodinamici, può essere affetta da fenomeni di interferenza, oltre a dovere far ricorso a modelli in scala ridotta. La modellistica matematica, unita alla simulazione numerica, è più flessibile ed elastica nello studio della variabilità della risposta in rapporto al mutare dei parametri di progetto o delle condizioni al contorno. Sempre nel caso fluidodinamico, essa consente di giungere a una descrizione completa del campo di moto, anche se, per regimi di flusso turbolenti, come vedremo essa necessita l'introduzione di ulteriori ipotesi circa il meccanismo di trasferimento di energia. La modellistica matematica è dunque elemento di congiunzione fra la modellistica sperimentale e la realizzazione progettuale. A monte, i modelli matematici traggono linfa vitale dall'analisi fenomenologica e sperimentale (Fig.3). Le equazioni sono sempre ispirate da leggi fisiche fondamentali, quali le condizioni di equilibrio nella statica, o la conservazione della massa, dell'energia e del momento nella dinamica dei mezzi continui. In tali equazioni, gli aspetti inerenti la reologia dei materiali, l'individuazione delle condizioni al contorno, nonché la determinazione dimensionale dei coefficienti e dei parametri caratteristici, sono fornite dall'analisi ingegneristica. (È proverbiale l'idiosincrasia dei matematici verso l'analisi dimensionale delle equazioni che essi trattano, preferendo di gran lunga l'ambientazione in spazi funzionali astratti in cui svanisce ogni riferimento 'tangibile' alla fisicità del problema originario. Essi sognano un mondo in

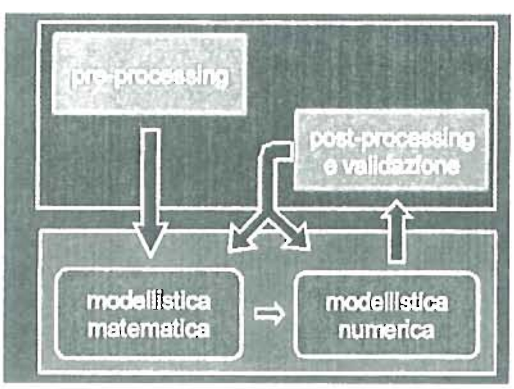
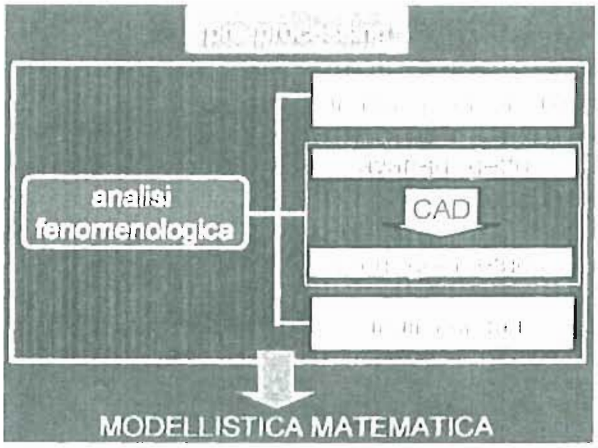
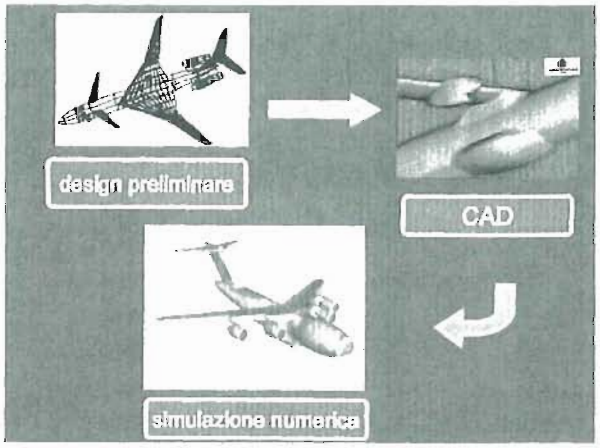
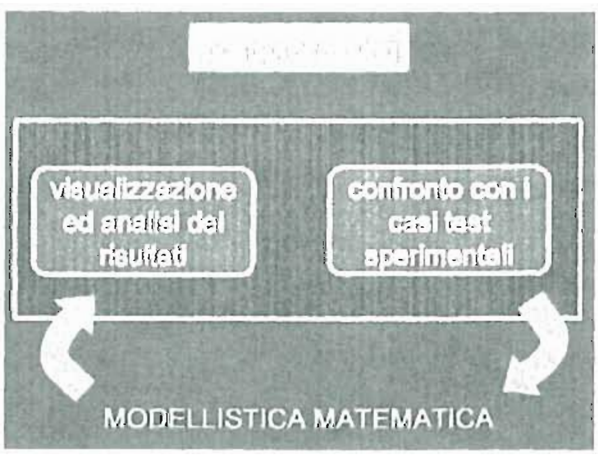


Figura 2. Interazioni fra mondo reale e modellistica.







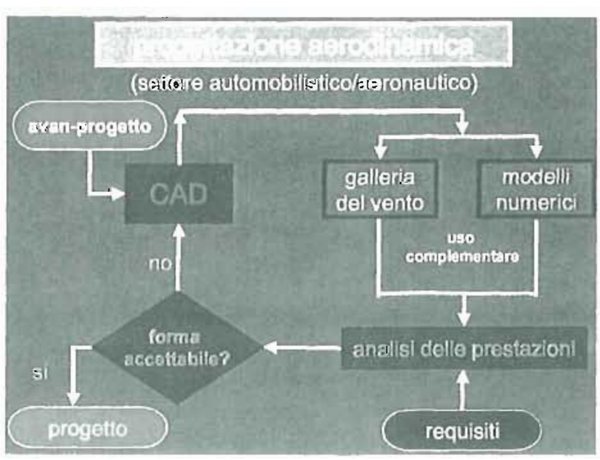


Figura 3
Analisi preliminare

Figura 4
Dal design preliminare alla simulazione numerica.

Figura 5
Analisi a posteriori.

Figura 6
Dall'avan-progetto al progetto.

cui l'ingegnere dica: "questo è il problema, ecco le equazioni". Tuttavia, raramente un problema dell'ingegneria nasce già formulato in termini rigorosamente matematici, e lo sforzo congiunto deve mirare a far affiorare le informazioni rilevanti e i dati significativi per la costruzione completa di un modello).

Ulteriore elemento distintivo dell'analisi preliminare è, in molti casi, la costruzione di un modello geometrico, ovvero la rappresentazione, attraverso modellatori solidi o strumenti di CAD, della regione tridimensionale entro cui le equazioni andranno risolte. Si pensi, per esempio, alla complessità del modello geometrico necessario a rappresentare un aereo in configurazione completa, partendo da un design preliminare, prima di intraprenderne la simulazione numerica (Fig.4). A valle del processo, la complessità dei risultati numerici ottenuti da un modello rende necessaria una loro analisi in forma logicamente organizzata, e una verifica alla luce delle prove sperimentali disponibili, ma, soprattutto, dell'intuizione dell'ingegnere. Quest'analisi retroattiva può a sua volta innescare un processo iterativo di modifica del modello (nelle equazioni e/o nei parametri che lo definiscono), sino a quando i risultati ottenuti su una classe significativa di casi di studio non siano ritenuti soddisfacenti da chi ha posto il problema (Fig.5).

Un esempio, relativo alla progettazione aerodinamica di un veicolo o un velivolo, è illustrato in Fig. 6. Si noti come nella fase che intercorre fra il design preliminare (o avan-progetto) e il progetto definitivo si ricorra in modo interattivo della galleria del vento e della simulazione numerica. La modellistica matematica può, dunque, diventare uno degli elementi aggreganti (e qualificanti) della cultura politecnica.

La presenza di laboratori sperimentali e di gallerie del vento, di specialisti nell'analisi teorica, nell'informatica, nelle scienze fondamentali quali la fisica e la chimica, e nei settori più spiccatamente tecnologici, e anche nell'architettura, nella grafica avanzata e nel design, è elemento distintivo di una scuola politecnica e può fungere da elemento catalizzatore e propulsivo per lo sviluppo di una disciplina intersettoriale quale è la modellistica matematica.

La simulazione numerica

L'obiettivo primario per un matematico applicato è la risoluzione effettiva del problema. I problemi matematici formulati nell'ambito della modellistica non sono quasi mai risolubili per via analitica. I teoremi dell'analisi matematica e della geometria, seppur fondamentali per stabilire se il problema sia "ben posto" o meno, assai raramente hanno natura costruttiva atta a indicare un processo di rappresentazione esplicita della soluzione. È pertanto necessario sviluppare metodologie di approssimazione che, in ogni circostanza, conducano ad algoritmi che rendano possibile la risoluzione su calcolatore.

Il compito di trasformare una procedura matematica in un programma di calcolo corretto richiede attenzione alla struttura, efficienza, accuratezza e affidabilità. Per tale ragione, la scelta di un metodo numerico non può prescindere da una conoscenza adeguata delle proprietà qualitative della soluzione del modello matematico, del suo comportamento rispetto alle variabili spaziali e temporali, delle sue proprietà di regolarità e stabilità.

È pertanto giustificato l'uso del termine modellistica numerica che generalmente si adotta a tale riguardo. Essa è una scienza interdisciplinare, che si trova alla confluenza di vari settori, quali la matematica, l'informatica e le scienze applicate. Intrinseco al concetto di modello numerico vi è quello di approssimazione, e dunque di errore.

La modellistica numerica mira a garantire che l'errore sia piccolo e controllabile e a sviluppare algoritmi di risoluzione efficienti. La controllabilità è un requisito cruciale per un modello numerico: l'analisi numerica fornisce stime dell'errore che garantiscano che esso stia al di sotto di una soglia di precisione fissata a priori (la ben nota tolleranza percentuale accettabile dall'ingegnere). A tale scopo vengono progettati algoritmi adattivi, i quali, adottando una procedura di *feedback* a partire dai risultati già ottenuti, modificano i parametri della discretizzazione numerica e migliorano la qualità della soluzione. Ciò è reso possibile dalla analisi a posteriori (quella basata sulla conoscenza del residuo della soluzione calcolata), uno strumento supplementare (rispetto all'analisi a priori, o di Hadamard), di cui può giovarsi la modellistica numerica.

Una misura dell'efficienza di un algoritmo è la sua complessità, ovvero la quantità di risorse (tempo di calcolo e occupazione di memoria) richieste per l'implementazione dell'algoritmo stesso. La convinzione che i supercalcolatori oggi disponibili consentano la risoluzione di problemi di arbitraria complessità è illusoria. Lo vedremo nel seguito, dove considererò alcuni esempi relativi a modelli deterministici, esprimibili tramite equazioni differenziali alle derivate parziali. In particolare, mi limiterò al caso delle equazioni della dinamica dei fluidi, per le quali esiste una consolidata tradizione di ricerca presso il nostro dipartimento di matematica.

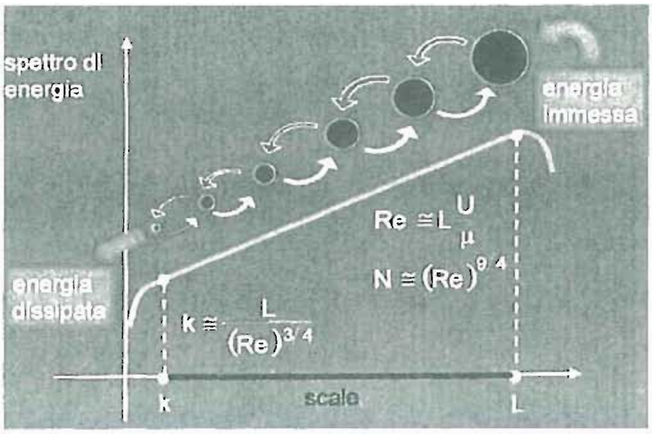
Personalmente, pur essendomi dedicato anche ad altre problematiche, quali l'analisi delle strutture, e dei fenomeni di propagazione di onde acustiche, elastiche ed elettromagnetiche, sono particolarmente attratto dalla dinamica dei fluidi, perché da un lato la si incontra in una amplissima gamma di problemi in diverse discipline scientifiche, dall'altro essa dà origine a una delle più difficili collezioni di problemi dell'intera matematica applicata.

Un esempio impegnativo: la Modellistica in fluidodinamica

I fluidi (liquidi o gas) hanno un ruolo pervasivo nella nostra vita quotidiana. La dinamica dell'atmosfera, la dispersione di agenti inquinanti nell'aria, la formazione di correnti e la circolazione di sedimenti nei corsi d'acqua, il fluire del sangue nel nostro sistema cardiovascolare, sono solo alcuni esempi che corroborano questa affermazione. Altri processi, di natura apparentemente diversa, sono tuttavia riconducibili a modelli di fluido: per esempio (a livello microscopico), gli elettroni in un dispositivo a semiconduttore si comportano come un fluido che conduce corrente elettrica.

Tutti questi esempi (e innumerevoli altri) sono modellabili attraverso un sistema di equazioni alle derivate parziali introdotte dall'ingegnere francese Louis Marie Henri Navier e dal fisico irlandese sir George Gabriel Stokes.

Nonostante tali equazioni siano note da oltre un secolo, molte caratteristiche del moto dei fluidi continuano a eludere la nostra capacità di comprensione. Peraltro, i problemi intricati hanno sempre esercitato un sottile fascino sui matematici



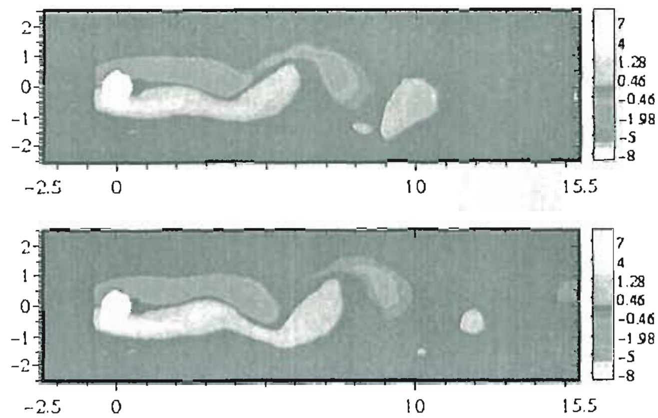


Figura 7
Scale della turbolenza e spettro di energia.

Figura 8
Vortici nella scia di un cilindro, nel caso in cui Re=200.

(come puntualizza P.Hein, "un problema degno di essere attaccato si dimostra tale resistendo agli attacchi"). I metodi analitici non conducono praticamente mai a esplicitare la soluzione delle equazioni di Navier-Stokes, se non sotto ipotesi fisiche e geometriche così restrittive da svuotare le stesse equazioni di ogni interesse applicativo.

La ragione di tale difficoltà è la naturale propensione dei fluidi a esibire comportamenti complessi, o, per meglio dire, turbolenti. La turbolenza, peraltro, non è una proprietà costitutiva di un fluido, ma piuttosto un regime specifico del flusso, che si manifesta quando un numero molto elevato di gradi di libertà prende parte attiva nella dinamica del fluido. La nonlinearità del modello fa si che la fisica sia accoppiata a tutte le possibili scale del moto. Tale interazione fra le scale è la responsabile del comportamento turbolento. Parafrasando U.Frisch e S.Orszag, dobbiamo ammettere che oggi si conosce meno delle scale fini della turbolenza (per esempio, di ciò che succede alla scala di 1mm nell'atmosfera) di quanto non si conosca la struttura sub-atomica della materia, o quella di grande scala dell'universo.

Il parametro che misura il "livello di turbolenza" in modo sintetico è il cosiddetto numero di Reynolds, direttamente proporzionale alla velocità caratteristica del fluido e inversamente proporzionale alla sua viscosità molecolare. Il numero di Reynolds misura l'importanza della convezione (che avviene alle scale macroscopiche) rispetto alla dissipazione (che si attiva invece a partire dal livello molecolare).

Dall'analisi delle equazioni di Navier-Stokes si può inferire che il numero di gradi di libertà attivi in un flusso turbolento è dell'ordine di N=Re9/4 (per semplicità di ragionamento, si può pensare di dover trattare, a ogni istante temporale, una serie di Fourier con N frequenze attive).

Essendo il numero di Reynolds di numerosi flussi (per esempio quelli intorno a un aereo) dell'ordine di 10^6, il corrispondente numero di gradi di libertà attivi può tranquillamente superare 10^{13}, ovvero diecimila miliardi.

L'energia che alimenta il fluido alle grandi scale (dovuta alle condizioni al contorno e alle forze di volume) viene trasferita a scale via via più piccole attraverso l'interazione nonlineare fra i gradi di libertà attivi nel fluido, con una sorta di cascata di energia che prosegue sino a raggiungere una scala così piccola al di sotto della quale l'energia stessa viene irreversibilmente dissipata in calore. La più piccola scala attiva nel fluido, che indicheremo con k, è nota come scala di Kolmogorov e risulta essere direttamente proporzionale alla più grande scala L e inversamente proporzionale a Re3/4 (Fig.7).

La conseguenza di una tale relazione è presto evidenziata. Per esempio, nella turbolenza atmosferica (quella che deve essere simulata ogni giorno per le previsioni meteorologiche) il numero di Reynolds è dell'ordine di 10^8 (ovvero 100 milioni) e pertanto, l'energia immessa a una scala di un chilometro si può ritrovare a scale dell'ordine di un millimetro.

Una caratteristica generale di un fluido turbolento è la presenza di regioni di flusso coerente, entro cui la turbolenza si organizza dando forma a moti regolari e non caotici, tipicamente strutture a spirale chiamate vortici. Un tornado ne costituisce un esempio su grande scala, così come gli anelli che si creano dal fumo di una sigaretta lo sono su piccola scala.

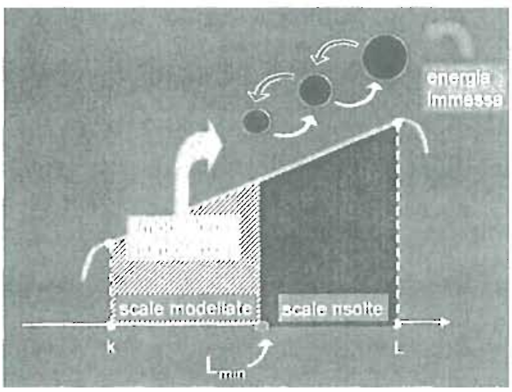
In Fig. 8 sono illustrati i vortici generati nella scia di un cilindro, qui rappresentato dalla sua sezione circolare. Le strutture coerenti appaiono organizzate in forma gerarchica, in cui i grandi vortici danno origine ai piccoli vortici, questi ultimi generano a loro volta strutture ancora più piccole, e così via fino a un diametro k dell'ordine della scala di Kolmogorov, come schematizzato in Fig.7.

Per converso, ogni scala spaziale è influenzata in modo significativo da una scala più piccola, e quest'ultima a sua volta da scale sempre inferiori, in un processo a catena che viene comunemente denominato *enhanced transport*.

Per simulare numericamente un flusso turbolento, difficilmente si possono tenere in conto tutte le N scale attive, dalla macroscala L sino a quella di Kolmogorov k. Per esempio, nel caso della turbolenza atmosferica, per poter simulare lo scambio energetico sino alla scala di Kolmogorov, si dovrebbero usare metodi che abbiano una distribuzione di nodi (dove calcolare le variabili primarie, la velocità e la pressione) che distino fra loro meno di un millimetro.

Ciò condurrebbe, per la simulazione di una porzione di fluido di un solo chilometro di ampiezza, alla risoluzione di un sistema dinamico di 10^{18} variabili (ovvero un miliardo di miliardi di incognite), che nessun calcolatore oggi esistente potrebbe affrontare.
È pertanto giocoforza rinunciare alla cosiddetta simulazione diretta della turbolenza (o DNS) e ricorrere a metodi di riduzione che approssimino direttamente solo un numero limitato di scale del fluido, e modellino il trasferimento energetico dalle scale piccole (quelle non considerate) a quelle "grandi", attraverso opportuni processi di media o di rinormalizzazione (Fig. 9 per una rappresentazione schematica).
Un ulteriore elemento di difficoltà si incontra nella modellistica e nella simulazione di flussi in presenza di reazioni chimiche, sia nel caso monofase che in quello multifase.
Per ragioni di tempo non svilupperò questo argomento, nonostante il notevole interesse che esso riveste in numerosissime applicazioni.
Nella pratica industriale, l'uso esteso della sperimentazione ha costituito a lungo il solo strumento disponibile per l'analisi di fenomeni connessi al moto dei fluidi. In alcune circostanze, tuttavia, le temperature e le velocità in gioco sono così elevate che la sperimentazione in galleria del vento è ardua se non impossibile (si pensi per esempio alla fase di rientro dall'atmosfera di un veicolo spaziale).
In altre situazioni, per esempio nello studio degli effetti fisio-patologici indotti dalla fluidodinamica del sangue, la sperimentazione in vivo, oltre a essere poco accurata e inevitabilmente lacunosa, non è esente da elementi di ovvia criticità per il paziente.
La modellistica numerica del moto dei fluidi, se impostata con il giusto rigore matematico, può fornire risultati affidabili per la comprensione di fenomeni complessi ed essere un valido strumento di supporto all'analisi sperimentale e alla progettazione industriale.
Naturalmente è necessario sviluppare metodologie numeriche adatte e predisporre algoritmi che sappiano sfruttare in modo ottimale le potenzialità offerte dalle moderne architetture di calcolo vettoriale e parallelo.

Ridurre per poter risolvere
La complessità dei problemi da risolvere, tuttavia, può essere ancora troppo elevata in relazione al ruolo che la simulazione numerica deve rivestire. Per esempio, nella fase di progettazione e ottimizzazione di un veicolo, nell'industria automobilistica si ricorre alla utilizzazione di diversi codici di calcolo in modo interattivo per l'analisi integrata delle diverse componenti progettuali.
La Fig.10 mostra che i tempi di elaborazione richiesti per l'analisi di alcuni elementi sono troppo elevati per consentire diverse simulazioni giornaliere. In tali casi, si impone un ripensamento del modello e una sua opportuna riduzione dimensionale. Per esempio, il modello ridotto delle equazioni di Navier-Stokes in cui vengano trascurati gli sforzi viscosi dà origine alle cosiddette equazioni di Eulero, le quali bastano a predire accuratamente la pressione e la portanza nell'aerodina-



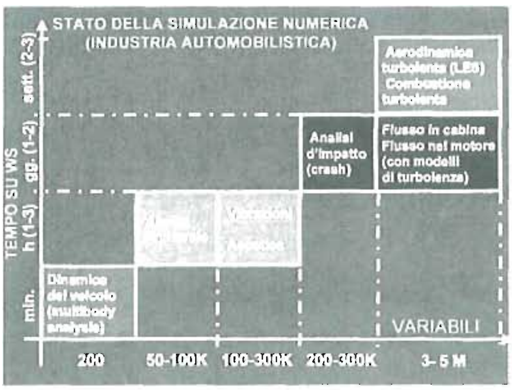
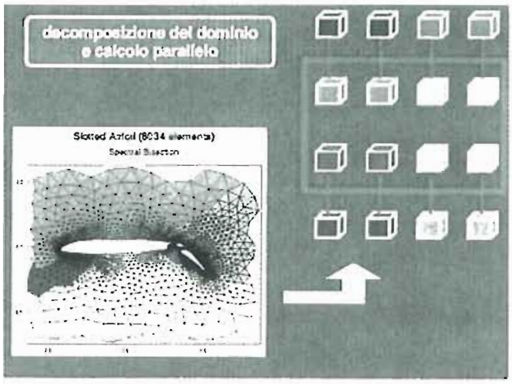


Figura 9
Scale risolte e scale modellate nella simulazione di flussi turbolenti.

Figura 10
Complessità della simulazione numerica nell'industria automobilistica.

Figura 11
Decomposizione del dominio
e calcolo parallelo.

Figura 12
Fattore di guadagno nel tempo
di calcolo per la risoluzione
di sistemi lineari



mica esterna, e anche lo scambio di energia fra fluido e macchina in flussi interni. Una ulteriore riduzione porta alla cosiddetta equazione del potenziale non lineare, una singola equazione (non più un sistema di equazioni) che ben si presta a descrivere flussi irrotazionali e isentropici, ed è per tale ragione frequentemente utilizzata nell'industria aeronautica per la simulazione di regimi non transonici. Naturalmente, l'adozione di modelli ridotti consente di abbassare drasticamente la complessità del problema, rendendo possibili simulazioni che altrimenti non lo sarebbero, ma tale riduzione deve essere giustificata. Dal punto di vista fisico non deve far perdere di significatività al problema in esame, da quello matematico deve conservare le proprietà teoriche fondamentali del modello originario. La sintesi fra queste due esigenze non è sempre facile e richiede uno sforzo congiunto di matematici e ingegneri.
In un altro ambito, la riduzione della complessità si può anche ottenere ricorrendo alla partizione geometrica del problema, onde rendere efficace il ricorso al calcolo parallelo. In tale caso si riconduce il problema numerico originario a una successione di problemi di dimensione ridotta, ognuno dei quali può essere risolto con una procedura simultanea in un ambiente di calcolo multiprocessore. In Fig.11 si illustra schematicamente questo processo relativamente alla simulazione del flusso intorno a un profilo alare di un aereo in assetto di atterraggio. In effetti, lo sviluppo delle architetture parallele ha stimolato i matematici a progettare nuovi metodi di calcolo, spesso basandosi su una riformulazione dello stesso modello matematico.
In Fig.12 viene mostrato come il fattore di abbattimento del tempo di calcolo dovuto a vent'anni di evoluzione nell'hardware sia addirittura superato da quello acquisito migliorando progressivamente i metodi numerici e adattandoli alle architetture vettoriali. La crescita simbiotica dell'hardware e del software è uno dei presupposti per trattare con successo modelli matematici di complessità sempre maggiore. Il nostro Rettore ha dimostrato in modo tangibile di condividere questo punto di vista, e di credere all'importanza che il calcolo scientifico ad alte prestazioni riveste per questa Scuola; di questo lo voglio personalmente ringraziare. Grazie per l'ascolto.

Nella prefazione al suo capolavoro *A Brief History of Time*, Stephen Hawking scrive che il suo editore lo ammonì che ogni equazione introdotta nel testo gli avrebbe fatto dimezzare le vendite. Hawking si limitò a includere la celeberrima equazione dell'energia di Einstein. Per trasposizione, e fatte le debite proporzioni, anch'io ho raccolto idealmente questo monito e non ho inserito alcuna equazione. Non sono certo che la comprensione di queste note ne risulti agevolata. Posso invece affermare con certezza che questa volontaria rinuncia è stata molto sofferta: ogni matematico costretto a esprimersi senza equazioni compie un gesto di autentico eroismo!